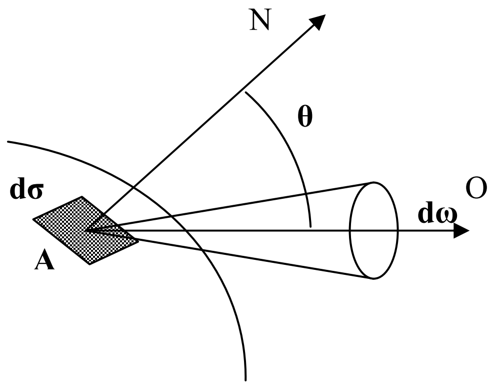
Approfondimenti sulla fotometria.
Basi teoriche

Consideriamo un elemento **dσ** della superficie fotosferica di una stella, che si assume sferica di raggio **R**, e sia AN la normale a **dσ**, la quale forma un angolo **θ** con la direzione dell'osservatore AO.



La quantità di energia emessa da **dσ** per unità di tempo, in un angolo solido **dω** intorno alla direzione AO nell'intervallo di frequenza **dν** si scrive:

$$dE_\nu = I_\nu(\theta)\cos\theta d\sigma d\nu d\omega \tag{1}$$

dove la grandezza così definita si chiama **intensità specifica** della radiazione uscente (o anche **radianza** della superficie della stella); nell'ipotesi di simmetria sferica essa dipende dalla direzione solo attraverso l'angolo ; dipende inoltre dalla frequenza e dalle proprietà fisiche dell'elemento di superficie.
Integrando rispetto all'angolo solido si ottiene il **flusso** (specifico) uscente o **emittanza** della superficie stellare

$$F_\nu = \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta)\cos\theta d\omega \tag{2}$$

Oppure, in caso di simmetria sferica,

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta)\cos\theta \sin\theta d\theta$$

Perché si assume uguale a zero l'intensità nelle direzioni corrispondenti a $\pi/2 < \theta < \pi$ (flusso entrante). $\mathbf{F_\nu}$ rappresenta la quantità totale di energia emessa per unità di tempo, di superficie e di frequenza.
Spesso l'intensità e il flusso specifici sono definiti per unità di lunghezza d'onda, anziché di frequenza; indicando con $\mathbf{F_\lambda}$ il flusso per unità di lunghezza d'onda, la relazione tra $\mathbf{F_\nu}$ e $\mathbf{F_\lambda}$ è data da:

$$F_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} F_\nu \qquad (3)$$

L'unità di frequenza è l'Hertz (Hz) o ciclosecondo; la frequenza della luce ordinaria, 5000 A, è uguale a 6x 10^{14} Hz.
La quantità di luce emessa da tutta la superficie della stella per unità di tempo e di frequenza si chiama luminosità specifica o monocromatica, $\mathbf{L_\nu}$; per una stella sferica si ha

$$L_\nu = 4\pi R^2 F_\nu \qquad (erg.s^{-1}.Hz^{-1}) \qquad (4)$$

Essendo R il raggio della stella (espresso in cm).

Poiché in generale non è possibile risolvere le superfici stellari, è possibile ricavare solo $\mathbf{L_\nu}$ e, se si conosce il raggio, al $\mathbf{F_\nu}$. Solo per il sole e, in maniera indiretta, è possibile ricavare anche la radianza $\mathbf{I_\nu}$.
Integrando la precedente espressione su tutte le frequenze si ottiene la quantità totale di energia emessa dalla stella nell'unità di tempo, detta lumonosità totale o, brevemente, luminosità

$$L = 4\pi R^2 \int_0^\infty F_\nu d\nu \qquad (erg.s^{-1}) \qquad (5)$$

La luminosità delle stelle è una delle grandezze più importanti relative a una stella; infatti, siccome le caratteristiche strutturali di una stella rimangono invariate per tempi molto lunghi, deve esistere al loro interno una sorgente di energia che produce la radiazione emessa all'esterno, a spese ovviamente di altre forme di energia, come quella gravitazionale o nucleare, in modo da mantenere la materia stellare in condizioni quasi statiche.

Relazione tra flusso specifico e risposta strumentale

Se la luce non subisse perdite nel cammino tra la stella e lo strumento rivelatore posto nel fuoco del telescopio alla distanza **r**, il flusso per unità di area sarebbe dato da:

$$f_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} F_\nu \qquad (erg.s^{-1}.cm^{-2}.Hz^{-1}) \qquad (6)$$

Un rivelatore proporzionale dovrebbe perciò dare una risposta $\mathbf{l_\nu}$, proporzionale a $\mathbf{f_\nu}$. Ma in realtà il fascio luminoso subisce lungo il suo percorso rilevanti perdite di energia, che dipendono dalla frequenza; è necessario perciò considerare attentamente le cause che possono produrre un'attenuazione del flusso specifico.

a) **Assorbimento interstellare**. Lo spazio tra le stelle non è vuoto; la *materia interstellare* è costituita da un *gas* molto tenue e da una certa quantità di *pulviscolo* distribuito irregolarmente, ma con densità maggiore sul piano galattico. L'attenuazione prodotta dal pulviscolo dipende dalla distanza e dalla relazione della stella ed è una funzione della frequenza. Indicheremo questa con il termine $\mathbf{a_\nu}$ il cui valore sarà sempre ≤1. Per le stelle più vicine si può assumere $\mathbf{a_\nu}$=1, perché l'assorbimento è trascurabile, ma per oggetti lontani può divenire molto impotante.

b) Assorbimento atmosferico. L'atmosfera terrestre determina a sua volta una considerevole attenuazione del fascio luminoso; per alcune lunghezze d'onda è completamente opaca, mentre per altre la trasparenza è limitata soprattutto dalla presenza del pulviscolo, gocce d'acqua, cristalli di ghiaccio, etc. Poiché lo spessore dell'atmosfera è piccolo rispetto al raggio, quando la distanza zenitale z della stella osservata non è molto grande, l'assorbimento atmosferico si può rappresentare mediante un fattore del tipo

$$a_\nu = e^{-k_\nu \sec z} = A_\nu^{-\sec z}$$

Il coefficiente di estinzione A_ν si può determinare con osservazioni a distanze zenitali diverse e si può perciò considerare conosciuto. Essendo ovviamente nota z, le osservazioni possono sempre essere ridotte allo zenit. Inoltre, col metodo dei minimi quadrati è possibile risalire al valore della magnitudine di un oggetto "fuori dall'atmosfera", avendone sottratto "virtualmente" il contributo di perdita dovuto all'atmosfera. Noi supporremo d'ora in avanti che le nostre misure saranno normalizzate allo zenit.

c) Perdite dovute all'ottica. Anche l'ottica dello strumento introduce perdite di luce per assorbimento, riflessioni, etc. Di queste si tiene conto introducendo un opportuno fattore strumentale $\mathbf{Q_\nu}$, anch'esso funzione della frequenza ν**.**

d) Sensibilità del rivelatore. Nessun rivelatore possiede la proprietà di rispondere in ugual misura a radiazioni di tutte le lunghezze d'onda; quelli che più si avvicinano a questa proprietà sono detti *bolometrici*. La selettività del rivelatore si può rappresentare mediante un fattore $\mathbf{S_\nu}$, se si assume che la risposta dello strumento sia proporzionale all'energia ricevuta (rivelatore lineare o proporzionale); in questo fattore si può considerare incluso l'effetto di eventuali filtri.

In definitiva, supponendo osservazioni ridotte allo zenit, la risposta strumentale è:

$$\sum a_\nu A_\nu Q_\nu S_\nu f_\nu \qquad (erg.s^{-1}.Hz^{-1})$$

Essendo **Σ** la superficie della pupilla d'ingresso del telescopio, cioè la superficie dello specchio principale.
Conviene separare il **fattore strumentale**

$$P_\nu = A_\nu Q_\nu S_\nu$$

Corrispondente sia all'assorbimento atmosferico (allo zenit) e sia agli effetti strumentali propriamente detti, il quale si può determinare una volta per tutti, e ridurre la risposta a quella che si avrebbe nel caso di un telescopio di area unitaria. La risposta è allora data da

$$l_\nu = a_\nu P_\nu f_\nu \quad (erg.s^{-1}.cm^{-2}.Hz^{-1}) \qquad (7)$$

che rappresenta il **flusso efficace per unità di area e di frequenza**.
Quest'ultima mostra come si possa, almeno in principio, risalire dal dato osservato rapresentato da $\mathbf{l_\nu}$ al flusso per unità di area, se si conosce il fattore strumentale $\mathbf{P_\nu}$ e l'assorbimento interstellare $\mathbf{a_\nu}$ **;** quando è nota anche la distanza **r**, si può ricavare dalla (6) la luminosità specifica $\mathbf{L_\nu}$ e, se si conosce anche il raggio della stella, il flusso (uscente) $\mathbf{F_\nu}$.

Principi di fotometria stellare. Sistemi di magnitudini.

L'equazione (7) contiene i principi teorici della fotometria astronomica. Essa corrisponde però al caso ideale di uno strumento che permetta di osservare separatamente la luce nelle diverse frequenze; nelle osservazioni fotometriche ordinarie ls risposta del rivelatore viene integrata sopra un intervallo finito di frequenze. Perciò il segnale è dato da

$$l = \int a_\nu P_\nu f_{\nu d} d_\nu \qquad (erg.s^{-1}.cm^{-2}) \tag{8}$$

e, in pratica, i limiti di integrazione si possono assumere uguali, rispettivamente, a 0 e a ∞.
Si definisce come la **magnitudine apparente** m di una stella

$$m = -2{,}5 \log_{10} l + C \tag{9}$$

Dove C è una costante, detta anche **costante di zero**. La (9) è chiamata **Formula di Pogson**. La ragione per cui è stata adottata per le magnitudini una scala logaritmica e si è trovato opportuno introdurre il fattore -2,5 è di carattere storico; infatti con questa scelta e fissando opportunamente la costante di zero, le magnitudini definite mediante la (9) coincidono con le classi di magnitudine degli antichi cataloghi, in particolare con quelle di Ipparco, purchè il fattore $\mathbf{P_\nu}$ corrisponda alla sensibilità media dell'occhio umano. La scelta di un coefficiente negativo è piuttosto infelice, perché in tal modo gli oggetti più luminosi corrispondono a magnitudini rappresentate da numeri più bassi. Essendo $\log_{10}100=2$, la (9) esprime il fatto che la differenza di 5 magnitudini corrisponde a un rapporto 100 nei flussi corrispondenti. Perciò la differenza di una magnitudine corrisponde a un rapporto $(100)^{1/5}=2{,}512$ nei flussi.
Naturalmente, per la presenza del fattore strumentale , la magnitudine di una stella dipende dal modo con cui viene osservata; si hanno perciò diversi **sistemi di magnitudini**, ciascuno dei quali è caratterizzato da una particolare caratteristica $\mathbf{P_\nu}$.
Sono in uso vari sistemi di magnitudini, di cui i principali sono i seguenti:

a) il sistema visuale, la cui funzione caratteristica corrisponde alla sensibilità media dell'occhio umano per deboli illuminazioni, associato a un telescopio. Questo è il sistema fotometrico più antico e anche quello con un errore più elevato (la precisione è di $\pm 0{,}1$) e può essere ridotto a 0,05 solo mediante speciali accorgimenti.
La costante di zero delle magnitudini visuali venne fissata in un primo tempo in maniera tale che la magnitudine della Stella Polare (α UMi) risultasse uguale a 2,12. Ma questa stella si rivelò più tardi variabile e perciò oggi lo zero delle magnitudini visuali si può considerare dalla media di un grande numero di osservazioni fotometriche eseguite soprattutto nell'Osservatorio di Harvard verso la fine del XIX secolo e riunite in un catalogo comprendente stelle fino alla magnitudine 6,5 – poco più di 9000 – noto come Revised Harvard Photometry (RHP).

b) Il sistema fotografico. Corrisponde alla sensibilità delle lastre fotografiche ordinarie impiegate nel fuoco di un telescopio riflettore. Malgrado la precisione non molto elevata delle misure fotografiche di magnitudine ($\pm 0{,}03$ nelle osservazioni più accurate), la possibilità di fotografare contemporaneamente sulla stessa lastra un gran numero di stelle rende il sistema fotografico molto utile, specie nei lavori a carattere statistico, quando il numero delle osservazioni è più importante che la loro precisione.

c) I sistemi fotoelettrici. Corrispondono a osservazioni effettuate con cellule fotoelettriche accoppiate a filtri opportuni; esistono molti sistemi fotoelettrici accoppiate a filtri opportuni; esistono molti sistemi fotoelettrici, ma il più diffuso è il cosiddetto sistema UBV, di Morgan-Johnson. Questo consiste in realtà di 3 differenti sistemi U, B e V, ciascuno con la sua particolare funzione . Il sistema V è abbastanza vicino al sistema visuale e quello B al

sistema fotografico. Il sistema U corrisponde a una banda di ferquenza nell'ultravioletto vicino. La grande precisione delle osservazioni fotoelettriche – l'errore può essere ridotto a $\pm 0{,}001$ circa - , rende estremamente importanti questi sistemi in tutti quei problemi astrofisici che richiedono grande accuratezza.
Standard fotoelettrici sono stati determinati da Morgan, Johnson e altri. Le magnitudini UBV di circa 20000 stelle sono state raccolte da Blanco e altri in un Catalogo pubblicato dal Naval Observatory nel 1968.

d) Le magnitudini monocromatiche. Si possono considerare come le magnitudini corrispondenti a u sistema particolare in cui la funzione che rappresenta il fattore strumentale ha un valore differente da zero solo in un intervallo di frequenza molto stretto. In pratica sistemi fotometrici di questo tipo si possono realizzare mediante filtri con una banda passante assai stretta (minore di 50 Angstrom) accoppiati con un fotometro fotoelettrico; la fotometria a banda stretta, sviluppata da B. Stromgren, Bappu e altri, contiene informazioni il cui signicato fisico è assai più diretto che quello di ogni altro tipo di misure fotometriche. Queste misure sono perciò di altissimo interesse in molti problemi astrofisici.
Alla stessa categoria appartengono le misure spettrofotometriche, che si ottengono mediante la scansione dello spettro di una stella ottenuto con un mezzo dispersore associato al telescopio. Siccome in questi casi la funzione $\mathbf{P}_\nu$ ha praticamente le caratteristiche di una funzione di Dirac, tutto ciò che si riferisce a fattori strumentali si può assumere incluso nella costante di zero per le magnitudini monocromatiche corrispondenti alla frequenza ν si ricava

$$m_\nu = -2{,}5 \log_{10} f_\nu^* + C \tag{10}$$

Essendo

$$f_\nu^* = \alpha_\nu f_\nu = \alpha_\nu \frac{L_\nu}{4\pi r^2} \tag{11}$$

Magnitudini assolute.

Supponiamo per un momento che l'assorbimento dovuto alla materia interstellare sia nullo, di modo che nelle equazioni precedenti si possa assumere $\alpha_\nu=1$; ciò si verifica certamente per stelle non eccessivamente lontane. Dalla (8) si ha allora:

$$l = \int_0^\infty P_\nu f_\nu d \ = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\infty P_\nu L_\nu d\nu \tag{12}$$

Il secondo membro di questa equazione dipende dalla distanza **r** e dal fattore

$$L = \int_0^\infty P_\nu L_\nu d\nu = 4\pi R^2 \int_0^\infty P_\nu F_\nu d\nu \tag{13}$$

Che rappresenta la **luminosità efficace** di una stella nel sistema fotometrico corrispondente al fattore strumentale $\mathbf{P}_\nu$ **.** E' utile definire una grandezza **M** che viene chiamata **magnitudine assoluta**, la quale dipende soltanto da **L** nello stesso modo in cui **m** dipende la **l**, cioè tale che

$$M = -2{,}5 \log_{10} L + C'$$

Dove **C'** indica una costante.
Ora, per la (12) e la (13), $l = L/4\pi r^2$; si ricava, perciò, per la (10)

$$M = m + 5 - 5\log_{10} r \qquad (14)$$

Avendo fissato per convenienza la costante **C'** n maniera tale che **M**=**m**, quando **r**=10pc; in tal modo la magnitudine assoluta di una stella è uguale alla magnitudine apparente che essa avrebbe se fosse portata alla distanza di 10 pc. La (14) si può anche scrivere, impiegando la parallasse

$$p = 1/r$$

come

$$M = m + 5 + 5\log_{10} p \qquad (15)$$

A seconda del sistema fotometrico in cui si misrura m si avranno naturalmente magnitudini assolute visuali, fotografiche, etc.
La distanza del sole espressa in parsec è uguale a 1/206265; per il sole si ricava quindi:

M_V=+4,79
M_B=+5,41
M_U=+5,51

In unità fotometriche ordinarie la luminosità efficace corrispondente a M=0 (nel sistema visuale) è pari a

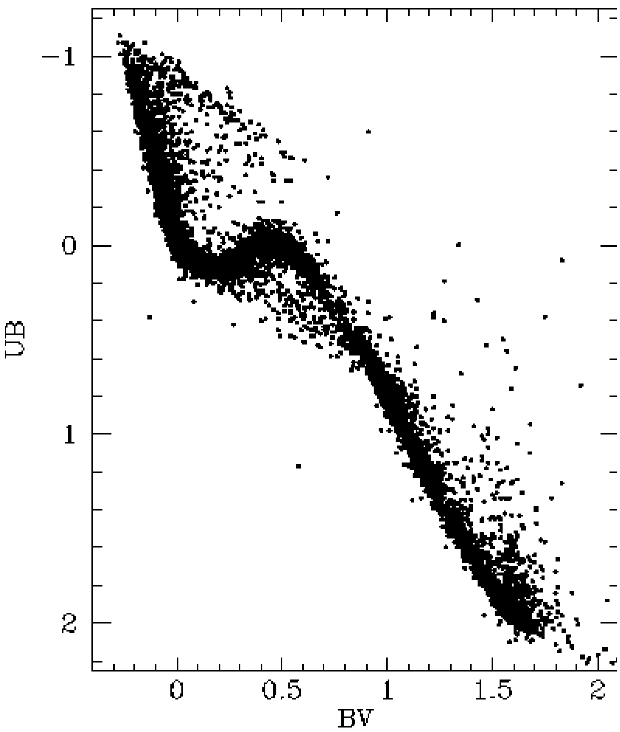
$$2{,}52 \times 10^{29} \text{ candele ;}$$

la luminosità efficace del sole è di 3,06 x 10^{27} candele. Conviene forse ricordare che una candela è definita come l'intensità luminosa corrispondente all'emissione di 1 lumen per steradiante ed è uguale a 1,019 candele internazionali.
La magnitudine assoluta delle stelle più luminose si aggira intorno a -9 o -10; si tratta però di oggetti assai rari e per lo più variabili. Ancora più luminose sono le supernove al massimo. Tra le stelle apparentemente più brillanti, una delle più luminose è α Cigni (Deneb) con M_V=-7,2 ; Sirio (α Cma) ha una magnitudine assoluta M_V=+1,41. Inoltre la maggior parte delle stelle più vicine sono assai meno luminose.
Le stelle di debole luminosità sono di gran lunga più numerose di quelle brillanti; secondo Luyten il massimo di frequenza della distribuzione delle magnitudini assolute tra le stelle vicine al sole si ha per M_V=+15,7. Tuttavia le stelle che contribuiscono maggiormente alla radiazione di un dato elemento di volume della galassia sono quelle di magnitudine intermedia come il sole.

Colore e suoi equivalenti.

Anche un'osservazione superficiale mostra che il colore delle stelle è assai diverso dall'una all'altra; il colore rosso di Antares (α Sco) e di Betelgeuse (α Ori) era stato notato sin dall'antichità.
In astrofisica il colore di una stella si suole rappresentare mediante la differenza tra le magnitudini in due diversi sistemi fotometrici, differenza che prende il nome di **indice di colore**.

Hanno un'importanza particolare gli indici di colore B-V e U-B che si possono formare con i sistemi U, B e V di Johnson e Morgan. Questi rappresentano dati di elevata precisione che vengono impiegati in numerosi problemi astrofisici.
Il diagramma a due colori si ottiene rappresentando in ascisse il colore B-V e in ordinata il colore U-B (vedi fig. sotto).



Impiegando le stelle più vicine per evitare l'effetto dell'assorbimento interstellare, si trova che le stelle si distribuiscono tutto lungo una linea che ha una forma caratteristica. Questa forma dipende naturalmente dalla distribuzione dell'energia nello spettro delle stelle; in particolare il minimo che si osserva in corrispondenza di B-V=0 è associato alla forte depressione causata nel vicino ultravioletto - intorno a 3600 Angstrom – dall'assorbimento continuo dovuto all'idrogeno nelle stelle di questo colore.
Se le stelle si comportassero come un perfetto corpo nero, avremmo che il diagramma a due colori sarebbe rappresentato da una retta. Il fatto che non sia così indica che le proprietà radiative di una stella sono assai diverse da quelle del corpo nero.

Effetto dell'assorbimento interstellare sulla magnitudine e sul colore.

Finchè la distanza delle stelle non è molto grande l'indice di colore è indipendente dalla distanza stessa; infatti, scrivendo, per esempio, l'equazione (14) una volta per le magnitudini visuali $\mathbf{m_v}$ e $\mathbf{M_v}$ e una volta per le magnitudini fotografiche $\mathbf{m_{pg}}$ e $\mathbf{M_{pg}}$, rispettivamente, e sottraendo membro a membro le equazioni così ottenute, si ricava:

$$IC = m_{pg} - m_v = M_{pg} - M_v$$

Il colore è perciò un dato intrinseco di una stella – a parte l'effetto del sistema fotometrico.
D'altra parte, quando la distanza è grande, non è più lecito trascurare l'assorbimento della materia interstellare; cioè non si può assumere, come è stato fatto in precedenza, α_v=1. Se consideriamo le magnitudini monocromatiche, ad esempio, dalla (10) e dalla (11) si ottiene:

$$m_\lambda = -2{,}5\log f_\lambda^* + C = -2{,}5\log f_\lambda - 2{,}5\log a_\lambda + C$$

Perciò, se indichiamo con $\mathbf{m_{0,\lambda}}$ la magnitudine monocromatica apparente che la stella avrebbe se non vi fosse assorbimento, viene

$$m_\lambda = m_{0,\lambda} - 2{,}5\log a_\lambda$$

Sia, poi, $\mathbf{M_\lambda}$ la magnitudine assoluta monocromatica corrispondente alla lunghezza d'onda λ; per la (14) si ha

$$M_\lambda = m_{0,\lambda} + 5 - 5\log r$$

cioè

$$M_\lambda = m_\lambda + 5 - 5\log r - A(\lambda)$$

Avendo posto $A(\lambda) = -2{,}5\log_{10} a_\lambda$.
La funzione **A(λ)** rappresenta l'effetto dell'assorbimento sulla magnitudine.
Ora è facile rendersi conto che se le proprietà ottiche della materia assorbente sono le stesse dappertutto, **A(λ)** si deve poter decomporre in 2 fattori, uno dipendente dalla distanza e dalla direzione della stella e l'altro dipendente solo dalla lunghezza d'onda. Invero, in questa assunzione le proprietà della materia assorbente saranno rappresentate dal **coefficiente d'assorbimento per unità di massa**, **k(λ)**, identico in ogni punto, defintio in modo che l'attenuazione subita dalla luce nell'attraversare uno spessore **dl** è dato da

$$k(\lambda)\rho dl$$

essendo **ρ** la densità della materia; se **r** è la distanza della stella, sarà, così

$$a_\lambda = \exp[-k(\lambda)\int_0^r \rho dl]$$

da cui

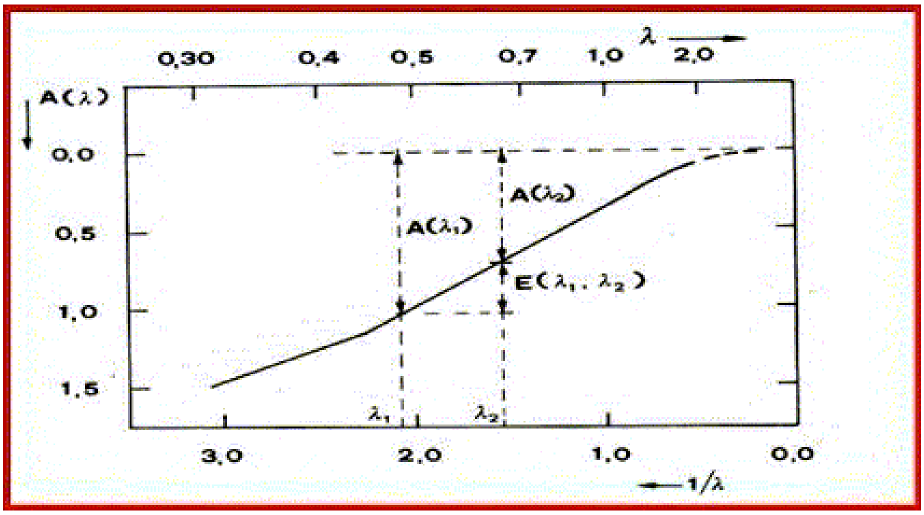
$$A(\lambda) = K.k(\lambda)$$

dove

$$K = 2{,}5\log_{10} e\int_0^r \rho dl = 1{,}086\int_0^r \rho dl$$

è un fattore che dipende solo dalla distanza della stella e dal modo con cui la materia interstellare è distribuita tra le stelle e il sole; si noti che l'integrale rappresenta la massa contenuta in un cilindro di sezione unitaria compreso tra le stelle e il sole.

Effettivamente le osservazioni mostrano che **k(λ)** non dipende dalla direzione in cui si osserva e dalla distanza – salvo alcune aree particolari come le nubi del Toro, di Orione, etc. La curva di assorbimento (media), cioè la curva che rappresenta l'andamento di **A(λ)** in funzione di **λ**è rappresentata nella figura ().



Si vede dalla figura che **A(λ)** tende a zero al crescere della lunghezza d'onda, cioè la materia interstellare è assai meno opaca alla luce rossa e infrarossa che non alla luce visibile o ultravioletta; sopra un intervallo abbastanza ampio **A(λ)** varia linearmente con 1/λ.